<u>Infos</u> : ◇ Évaluation du cours en ligne
◇ Intervention Manuela Pineros-Rodriguez

◇ Mercredi : STCC indisponible.

Formules de politesse / Jeu du vérif. - falsificateur

| | | |
|---|---|---|
| Dans ce qu'il faut montrer | → Dans la preuve | |
| $\forall x \in X$ | → Soit $x \in X$ quelconque | ⚠ pas d'hyp. sur $x$ |
| $\exists x \in X$ | → Posons $x =$ | Je choisis ce que je veux ! |

---

Dans ce qui est connu ?

# Chapitre 3 Suites de nombres réels

## §3.1 Définition & propr. élémentaires

**Définition 3.1** (suite)

$f(n)$

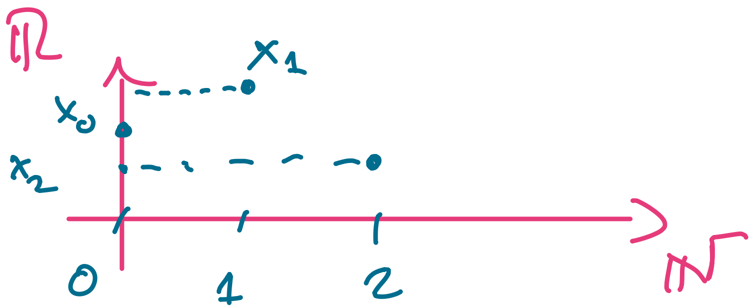
Une suite est la donnée d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sauf qu'à la place de $f(n)$ on écrit $x_n$. Pour désigner la suite en entier, on écrit $(x_n)_{n \geq 0}$ ou juste $(x_n)$

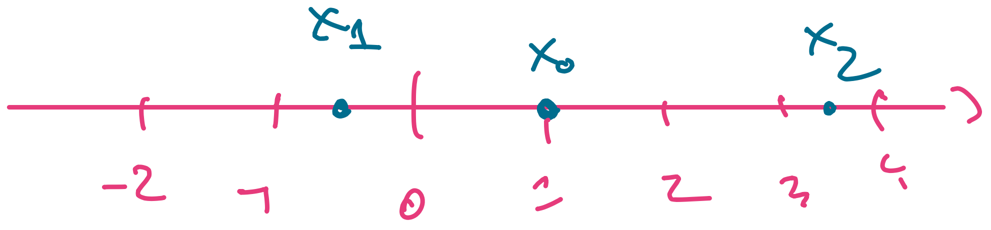
$f$

Des fois, on fait commencer la suite à $n_0 \geq 1$, auquel cas on écrit $(x_n)_{n \geq n_0}$

# Représentation

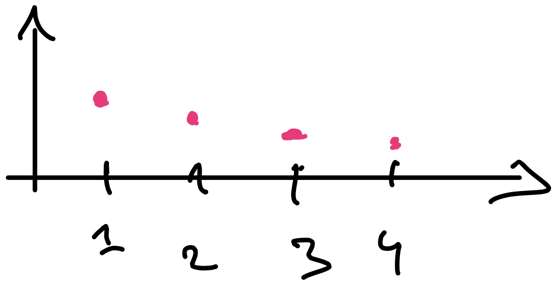
$x_0 = 1$ , $x_1 = -\frac{1}{2}$ , $x_2 = 3,5$

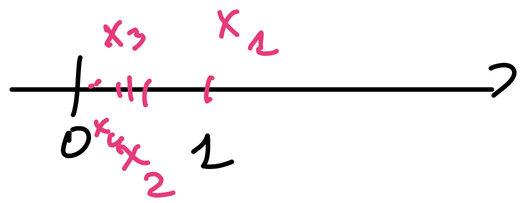



**Exemple 3.2** (i) La suite <u>harmonique</u> $(x_n)_{n \geq 1}$ est définie par $x_n = \frac{1}{n}$

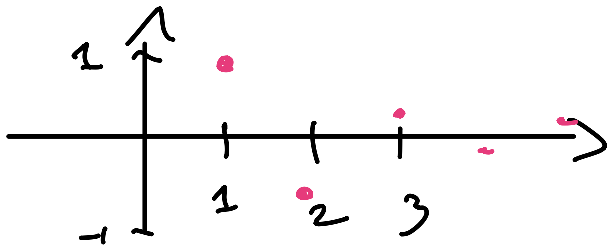
$x_1 = \frac{1}{1}$ , $x_2 = \frac{1}{2}$ , $x_3 = \frac{1}{3}$ , ...



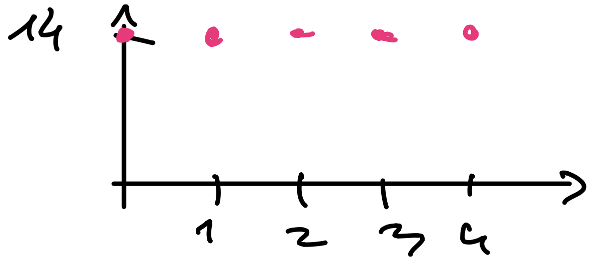
(ii) La suite harmonique alternée $(x_n)_{n\geq 1}$ est définie par

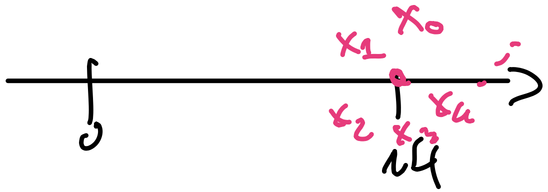
$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. $\quad x_1 = \frac{1}{1} = 1$, $\quad x_2 = \frac{-1}{2}$, $\quad x_3 = \frac{1}{3}$, $\quad x_4 = \frac{-1}{4}$, ...




(iii) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = 14$. On a

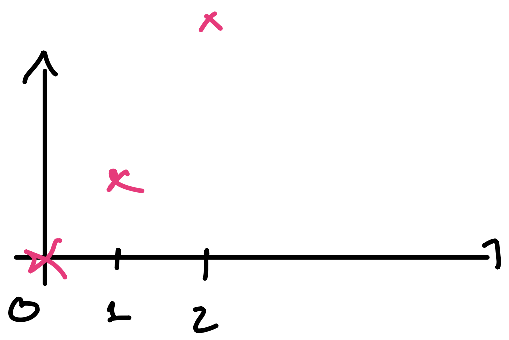
$x_0 = 14$, $\quad x_1 = 14$, $\quad x_2 = 14$, ...




(iv) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = n^2$. On a

$x_0 = 0$, $\quad x_1 = 1$, $\quad x_2 = 4$, $\quad x_3 = 9$, ...



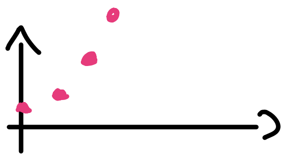

(v) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier

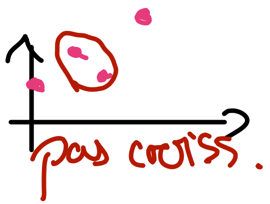
$$x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5,\ x_4=7,\ x_5=11,\ x_6=13,\ \dots$$

**Définition 3.3**

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que

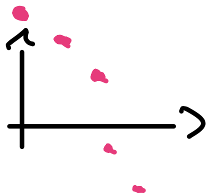
(i) $(x_n)$ est croissante si $\forall n\geq 0,\quad x_{n+1}\geq x_n$






(ii) $(x_n)$ est strictement croissante si $\forall n\geq 0\quad x_{n+1}>x_n$

(iii) $(x_n)$ est décroissante si $\forall n\geq 0,\quad x_{n+1}\leq x_n$



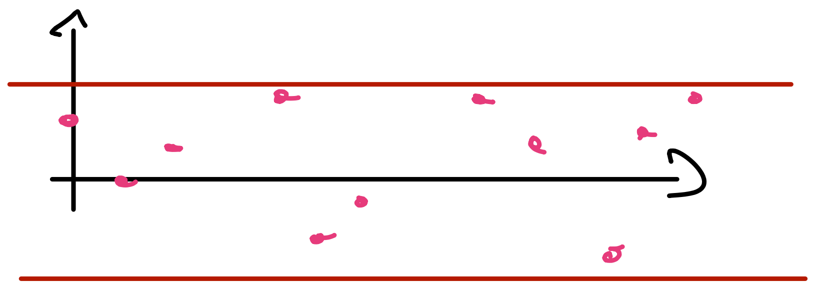
(iv) $(x_n)$ est strictement décroissante si $\forall n \geq 0 \quad x_{n+1} < x_n$

(v) $(x_n)$ est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante

(vi) $(x_n)$ est majorée si $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0\,,\ x_n \leq c$


(vii) $(x_n)$ est minorée si $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall n\,,\ x_n \geq c$


(viii) $(x_n)$ est bornée si elle est majorée et minorée



Remarque 3.4

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(i) $(x_n)$ est majorée si et seulement si $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ est majorée

(ii) $(x_n)$ est minorée si et seulement si $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ est minorée.

Notation 3.5 $\left(\sup(x_n), \inf(x_n)\right)$

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(i) Si $(x_n)$ est majorée, on écrit $\sup(x_n) = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

(ii) Si $(x_n)$ est minorée, on écrit $\inf(x_n) = \inf\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$

<u>Proposition 3.6</u> (Caractérisation des suites bornées.)

Une suite $(x_n)$ est bornée si et seulement si

$$\exists C \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq 0, \quad |x_n| \leq C.$$

<u>Preuve</u>: "$\Rightarrow$": Supposons que $(x_n)$ est bornée et montrons que $\exists C \geq 0$ tq $\forall n \geq 0$, $|x_n| \leq C$,

i.e.

$$\left.\begin{array}{l} \exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq 0, \quad x_n \leq M \\ \exists m \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq 0, \quad x_n \geq m \end{array}\right\} \Rightarrow \exists C \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq 0 \quad |x_n| \leq C$$

Soit $M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0,\ x_n \leq M$, et soit $m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0,\ m \leq x_n$.

→ ensemble avec 2 éléments, le plus grand c'est le max

Posons $c = \max\{|m|, |M|\} \geq 0$

Soit $n \geq 0$ quelconque.

$|m| \leq \max\{|m|, |M|\}$ $\qquad |-m| \geq -m$

$$-c = -\max\{|m|, |M|\} \leq -|m| = -|-m| \leq m \leq x_n \leq M \leq |M|$$

$$\leq \max\{|m|, |M|\} = c$$

$\Rightarrow -c \leq x_n \leq c \Rightarrow |x_n| \leq c$. $n$ étant quelconque, on a le résultat voulu

"$\Leftarrow$" $M = c$, $m = -c$

Example 3.7 : (i) Soit la suite $(x_n)$ définie par

$x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$. "Montrons" que la suite est bornée à l'aide

de la caractérisation

$$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|1+\sqrt{n}|} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1} = \underbrace{1}_{:=C}$$

## §3.2 Limites de suites

**Définition 3.8** (limite, suite convergente)

(i) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\ell$ est la limite de $(x_n)$ ou $(x_n)$ converge vers $\ell$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\, n \geq N \quad |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\ell = \lim_{n \to \infty} x_n$

(ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que $(x_n)$ converge ou $(x_n)$ est convergente si, $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $(x_n)$ converge vers $\ell$, i.e.

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exemples 3.9

(i) Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

Détermination du résultat : $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Recherche de Preuve : $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ On résout pour $n$ !

$|x_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \qquad \frac{1}{n} \leq \varepsilon \qquad 1 \leq \varepsilon \cdot n \qquad \frac{1}{\varepsilon} \leq \underline{n}.$

on termine avec $n \geq$ bidule, $N = \lceil \text{bidule} \rceil$

on prendra $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ $\qquad \lceil \text{bidule} \rceil \geq$ bidule

<u>Preuve</u>: Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$$|x_n - \ell| = |x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} \overset{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon}}{\leq} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$\varepsilon$ étant quelconque, on a montré $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

(ii) Soit $x_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad n \geq 1$

<u>Détermination du résultat</u>: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Recherche de preuve : $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ $\qquad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| \leq \varepsilon$

$\frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \qquad \frac{1}{n} \leq \sqrt{\varepsilon} \qquad 1 \leq \sqrt{\varepsilon}\, n \qquad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq n \rightsquigarrow N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$

Montrons que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$. Soit $n \geq N$ quelconque. On a

$$|x_n - \ell| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \overset{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil^2}$$

$$\overset{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil}{\leq} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon.$$

$\varepsilon$ étant quelconque, on a le résultat.

(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $x_n = \alpha$ pour $n \geq 0$ (suite constante)

Détermination du résultat $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \alpha = \alpha$

Recherche de preuve

$|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ $\quad |\alpha - \alpha| \leq \varepsilon$ $\quad 0 \leq \varepsilon$ toujours vrai!

$N = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = 0$. Soit $n \geq N$. Alors,

$|x_n - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon$.

$\varepsilon$ étant quelconque, on a le résultat.